Introduction à la physique des vibrations et des ondes

Ch1. Equations différentielles

Noureddine. ASSAAD
Page web : cspm.isae.edu.lb

ISAE cnam-Liban

31 mars 2021

Plan du cours UTC 403

Les chapitres 1 et 2 sont présentés à titre de références

- Chapitre 1 : **Outils Mathématiques**
    - Notions les vecteurs
    - Les nombres complexes
    - Equations différentielles du second ordre à coefficients constants
- Chapitre 2 : **Cinématique, dynamique du point et énergie**
    - **Cinématique du point** : position, vitesse et accélération dans les systèmes des coordonnées : Cartésiennes, polaires, Cylindriques, Sphériques
- **Dynamique du point :** Notion de Force, Les lois de Newton. Etude du mouvement. Notions de travail et énergie
- **Notion sur la mécanique de Lagrange**



- Chapitre 3 : **Systèmes oscillants à un degré de liberté**
  - Généralité sur les vibrations : Période et fréquence
  - Oscillations harmoniques : Equation du mouvement, Représentation complexe, Représentation de Fresnel, Superposition de vibrations de même fréquence
  - Exemples d'oscillateurs harmoniques : Masse ponctuelle sur un axe. Pendules élastiques. Pendule de torsion Pendule simple, Pendule réel.
- Oscillations amorties
  - Oscillations amorties par frottement visqueux : Amortissement faible. Régime critique. Régime apériodique. Facteur de qualité
  - Oscillations amorties par frottements solide
- Oscillations forcées
  - Équation du mouvement
  - La résonance : amplitude et vitesse
  - Impédance mécanique
  - Énergie

- Chapitre 4 : **Introduction aux oscillations des systèmes à plusieurs degrés de liberté**
  - Notions sur les systèmes d'équations différentielles
  - Systèmes à plusieurs degrés de liberté
    - Oscillation des deux masses attachées à trois resorts
    - Pendules couplés
  - Oscillations libres (harmoniques et amorties) et Oscillations forcées.
  - Phénomène de battement
  - Notions sur les systèmes à n degrés de liberté
- Chapitre 5 : **Propagation d'ondes**
  - Définition et mécanisme de propagation des ondes, Ondes progressives : longueur d'onde et vecteur d'onde..
  - Equation de propagation : Cas générale, cas de corde vibrante,
  - Ondes de compression dans un solide
  - Ondes acosutiques
  - Réflexion et transmission
  - Superposition des ondes : Interférence et battements
  - Onde stationnaire, modes cas des corde et des ondes acoustiques
  - Effet Doppler



- Une équation différentielle linéaires du second ordre à coefficients constantes est l'équation de forme générale :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (1)$$

  - où a, b et c sont des constantes et $f(x)$ le second membre est une fonction, donnée, continue de x.
- si $f(x) = 0$ l'équation est dite homogène (ou sans second membre $(ESSM)$) : $ay'' + by' + cy = 0$

Exemple :

$$2y'' + 4y' - 3y = \sin x$$

l'équation homogène

$$2y'' + 4y' - 3y = 0$$

Solution des Equations différentielles linéaires

- Résoudre, ou intégrer, une équation différentielle c'est de trouver **toutes les fonctions** $y = y(x)$ qui vérifient cette équation
- La solution générale se présentera sous la forme $y = y_g + y_p$ où
  - $y_g(x)$ est la solution générale de l'équation homogène $(ESSM)$
  - $y_p(x)$ est une solution particulière de l'équation complète $(EASM)$
  - Sous certaines conditions une équation différentielle du second ordre admet une infinité de solutions dépendantes de deux constantes arbitraires :

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

    - **En cinématique**, les conditions initiales sont celles de la **position** du mobile et de sa **vitesse** à l'instant **initial.**

Solution générale de l'équation homogène

- L'équation sans second membre $(ESSM)$ est :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(ESSM)}$$

- Nous somme besoin de chercher une fonction $y = y(x)$ telle que la combinaison linéaire avec ses dérivées y' et y'' soit nulle, c'est-à-dire $ay'' + by' + cy = 0$. Une seule fonction répond à ces demandes : *la fonction exponentielle*.
- On cherchera, donc, des solutions de la forme $y = e^{\lambda x}$ où λ est une constante à déterminer, les dérivées sont :
  - $y' = \lambda e^{\lambda x}$
  - $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

  et en remplaçant dans (ESSM) on obtient :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

- Cett équation est appelée **équation caractéristique**, et la forme de la solution générale de l'équation différentielle linéaire sans second membre dépend des racines de l'équation caractéristique.

Trois cas sont possibles selon la valeur du discriminant $\left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$ l'équation caractéristique

Cas où $\Delta > 0$

- L'équation caractéristique admet deux racines réelles et distinctes λ_1 et λ_2
- les fonctions $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ et $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ sont deux intégrales particulières de l'équation (ESSM)
  - la solution générale est une combinaison de ces deux solution :

$$y_g = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Exemple

$$y'' + y' - 6y = 0$$

- l'équation caractéristique :
  $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Longrightarrow \Delta = 25 > 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$
- la solution générale est :

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

Cas où $\Delta < 0$

- L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :
  - $\lambda_1 = \gamma + j\omega$ et $\lambda_2 = \gamma - j\omega$
- on peut aussi proposer la solution sous la forme : $y_g = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ mais on choisit les constantes telles que $C_1 = A_1 + jA_2$ et $C_2 = A_1 - jA_2$ le conjugué de C_1, y_g devient :

$$\begin{aligned} y_g &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = (A_1 + jA_2)\, e^{(\gamma + j\omega)x} + (A_1 - jA_2)\, e^{(\gamma - j\omega)x} \\ &= e^{\gamma x}\left[A_1\left(e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}\right) + jA_2\left(e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}\right)\right] \\ &= e^{\gamma x}\left[2A_1 \cos\omega x - 2A_2 \sin\omega x\right] \end{aligned}$$

- Soit finalement en posant $A = 2A_1$ et $B = -2A_2$

$$y_g = e^{\gamma x}\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right)$$

- En physique on posera

$$y_g = Y e^{\gamma x} \cos\left(\omega x - \varphi\right)$$

tel que : $Y = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)$



Cas où $\Delta = 0$

- L'équation caractéristique admet alors une racine double $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$ ce qui donne une solution particulière : $y = e^{\lambda x}$.
- On connaît cette solution particulière de l'équation sans second membre, on applique ensuite la méthode générale, c'est-à-dire qu'on pose $y = z(x)\, e^{\lambda x}$ d'où
  - $y' = e^{\lambda x}\left[\lambda z + z'\right]$ et $y'' = e^{\lambda x}\left[\lambda^2 z + 2\lambda z' + z''\right]$

  qu'on remplace dans l' ESSM. On obtient :

$$\begin{aligned} & a\left(\lambda^2 z + 2\lambda z' + z''\right) + b\left(\lambda z + z'\right) \\ = \quad & a z'' + (2a\lambda + b)\, z' + \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) z = 0 \end{aligned}$$

- Comme $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $2a\lambda + b = 0$ car $\Delta = 0$ alors $z'' = 0$, en intégrant, deux fois on trouve $z' = C_1$ et $z(x) = C_1 x + C_2$ et finalement :

$$y_g = (C_1 x + C_2)\, e^{\lambda x}$$

Exemples

1. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

   1. Son équation caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$
   2. Le descriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 13 = -36 < 0$ donc les racines sont complexes conjugées : $\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm 6j}{2} = 2 \pm 3j$
   3. La solution générale est :

$$y_g(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

   ou bien :

$$y_g(x) = Ye^{2x}\cos(3x - \varphi)$$

2. Soit l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = 0$
   1. L'équation caractéristique $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$
   2. $\Delta = 36 - 36 = 0$ on a donc une racine double $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$
   3. La solution générale est :

$$y_g(x) = (ax + b)e^{-3x}$$

- **Cas où le second membre se présente sous la forme**

$$f(x) = F\cos\omega x \quad ou \quad f(x) = F\sin\omega x$$

On cherchera une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = A\cos(\omega x - \varphi)$$

La méthode partique utilisée en physique est l'introduction de notation complexe
On propose la solution $Y = Ae^{j(\omega x-\varphi)} \Longrightarrow Y' = j\omega Y$ et $Y'' = -\omega^2 Y$ avec $f(x) = Fe^{j\omega x}$
En substituant dans l'équation différentielle : $ay'' + by' + cy = ae^{j\omega x}$

$$-\omega^2 aY + j\omega bY + cY = Fe^{j\omega x}$$

on trouve

$$Ae^{-j\varphi} = \frac{F}{-a\omega^2 + c + jb\omega}$$

soit

$$A = \left|\frac{F}{-a\omega^2 + c + jb\omega}\right| = \frac{F}{\sqrt{(c-a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad et \quad \varphi = \arctan\frac{b\omega}{c - a\omega^2}$$

Exemple

Considérons l'équation différentielle suivante : $y'' + 4y = 2\cos 3x$
La solution générale est de la forme $y = y_g + y_p$ où y_g est la solution générale de l'ESSM et y_p est une solution particulière de l'EASM

Solution générale de l'ESSM : $\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2j$

$$y_g(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x = C\cos(2t + \varphi)$$

Solution particulière de l'équation complète

- *Le second membre est* $f(x) = 2\cos 3x = \text{Re}\left(2e^{3jx}\right)$
- On cherchera alors la solution sous la forme $y_p(x) = A\cos(3x - \varphi)$
- En notation complexe : $Y = Ae^{j(3x-\varphi)} \Longrightarrow Y'' = -9Ae^{j(3x-\varphi)}$
- $Y'' + 4Y = 2e^{3jx} \Longrightarrow -9Ae^{j(3x-\varphi)} + 4Ae^{j(3x-\varphi)} = 2e^{3jx} \Longrightarrow -5Ae^{-j\varphi} = 2$
- On a donc : $\varphi = 0$ et $A = -\dfrac{2}{5}$

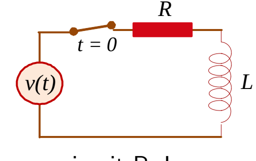
$$y_p(x) = -\frac{2}{5}\cos 3x$$

- Finalement :

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{2}{5}\cos 3x$$

Circuit (R,L)

Considérons
un circuit **R, L** est un circuit électrique contenant
une résistance (R) et une bobine, d'inductance L,
en série, sur lequel on applique une f.e.m $v\,(t) = V\cos\omega t$
Cherchons l'intensité $(i\,(t))$
du courant qui traverse le circuit en fonction du temps t
On appliquant la loi de Mailles
le circuit est, alors régit par l'équation différentielle :



circuit R, L

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V\cos\omega t$$

où $L\dfrac{di}{dt}$ est la tension au borne de la bobine et Ri est celle au borne de la résistance R. on a donc une équation différentielle linéaire du premier ordre.
La solution générale de l'équation différentielle est la combinaison de la solution générale de l'équation homogène et et une solution particulière de l'équation complète

solution générale de l'équation homogène

La solution générale de l'équation homogène $L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0$ est

$$i_g\left(t\right) = C\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

où C est une constante arbitraire
En régime permanant cette solution tend vers zéro avec la croissance de t.

solution particulière en introduisant la notation complexe

On a $v(t) = V \cos \omega t = \mathrm{Re}\left(Ve^{j\omega t}\right)$ alors on cherchera une solution particulière

$$i_p(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

sous forme complexe : $I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} = I_0 e^{-j\varphi} e^{j\omega t} \Longrightarrow \frac{di_p}{dt} = j\omega I e^{-j\varphi} e^{j\omega t}$

En substituant dans l'équation différentielle : $L\frac{di}{dt} + Ri = v(t)$ on trouve :

$$L\left(j\omega I_0 e^{-j\varphi} e^{j\omega t}\right) + RI_0 e^{-j\varphi} e^{j\omega t} = Ve^{j\omega t}$$

soit

$$(R + jL\omega)\, I = V$$

où $I = I_0 e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe tel que

$$I_0 = |I| = \frac{|V|}{|R + jL\omega|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad et \quad \varphi = \arctan \frac{L\omega}{R}$$

On trouve alors

$$i_p(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

l'impédance complexe

On a

$$i_p(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

en utilisant la loi d'Ohm on trouve $V = ZI$ **où**

$$Z = R + jL\omega$$

est la résistance généralisée ou l'impédance du circuit

$$|Z| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$